Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. Я. Сидельник, В. П. Машковский, П. В. Севрук

ЛЕСНАЯ БИОМЕТРИЯ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением по образованию
в области природопользования и лесного хозяйства
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования
по специальности 1-75 01 01 «Лесное хозяйство»*

Минск 2021

УДК 630*9:519.24(076.5)(075.8)
ББК 43:22.172я73
С34

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра «Лесоводство, экология и защита леса» Мытищинского
филиала Московского государственного технического
университета имени Н. Э. Баумана (заведующий кафедрой
кандидат биологических наук, доцент *В. А. Липаткин*;
доцент кафедры кандидат сельскохозяйственных наук,
доцент *П. Г. Мельник*);
начальник отдела дистанционного зондирования
и мониторинга лесов РУП «Белгослес»
кандидат сельскохозяйственных наук *М. А. Ильючик*

Сидельник, Н. Я.

С34 Лесная биометрия. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие для студентов специальности 1-75 01 01 «Лесное хозяйство» / Н. Я. Сидельник, В. П. Машковский, П. В. Севрук. – Минск : БГТУ, 2021. – 120 с.

ISBN 978-985-530-891-2.

В пособии описаны статистические методы анализа массовых данных в случаях применения к лесному хозяйству. Рассмотрены такие вопросы, как группировка экспериментальных данных, вычисление основных статистических показателей, анализ распределения массовых наблюдений, исследование закономерностей связи между параметрами объектов, дисперсионный анализ. В каждой лабораторной работе сформулирована цель, указаны обеспечивающие средства, приведен теоретический материал, касающийся изучаемой темы, даны задания и описан ход выполнения работ с пояснениями и необходимыми для этого рисунками.

Лабораторный практикум предназначен для студентов специальности 1-75 01 01 «Лесное хозяйство», также будет полезен магистрантам, аспирантам, работникам лесохозяйственных учреждений при выполнении обработки массовых данных и статистического анализа их различными методами.

УДК 630*9:519.24(076.5)(075.8)
ББК 43:22.172я73

ISBN 978-985-530-891-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лесные сообщества и характеризующие их показатели отличаются широкой изменчивостью. Эффективность ведения лесного хозяйства определяется полнотой научных сведений о естественном формировании лесных фитоценозов и воздействии на них хозяйственных мероприятий. В результате действия внутренних причин и внешних факторов варьирование признаков (показателей) носит случайный, ненаправленный характер. Необходимо располагать соответствующими методами, чтобы разобраться в сущности таких явлений и дать им надежную (вероятную) количественную и качественную оценку.

Лесная биометрия решает задачи обработки массовых (статистических) данных. Экспериментальные материалы, собранные в лесу, как раз и являются таковыми. Как правило, они представлены в виде числовых значений, характеризующих различные лесные объекты (высота, диаметр или объем дерева и т. д.).

Предметом лесной биометрии являются различные случайные величины, характеризующие лесные сообщества. Основная задача лесной биометрии – количественный и качественный анализ массовых случайных явлений, имеющих место в лесных биогеоценозах. Такая процедура подразумевает ряд этапов: организация и планирование наблюдений; сбор экспериментальных данных; свертка информации, т. е. сведение большого количества исходных данных к небольшому числу параметров; анализ экспериментальных данных; принятие решений на основе результатов такого анализа; прогнозирование случайных явлений.

Данное учебно-методическое пособие окажет помощь студентам при выполнении лабораторных работ в процессе изучения курса лесной биометрии. Инженер лесного хозяйства должен оценивать деревья в лесу не только в качестве источника ресурсов, но и уметь выявлять их роль в средообразующих процессах, формализуя их в статистических и математических взаимосвязях и моделях.

При написании учебно-методического пособия без прямого цитирования и специальных ссылок были использованы книги и работы ряда авторов [1–13], обратившись к которым можно более подробно ознакомиться с теоретической и практической сторонами отдельных вопросов.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A – коэффициент асимметрии
α – уровень значимости
b_0, b_1, b_2, b_3 – коэффициенты регрессии
D, d – диаметр дерева на высоте груди (1,3 м), см
D_0, $D_{\text{гр}}$ и $D_{\text{ост}}$ – соответственно *общая, межгрупповая* (факторная) и *внутригрупповая* (остаточная) дисперсии
E – коэффициент эксцесса
F – критерий Фишера
f_i – частоты классов (эмпирические)
$\tilde{f}_i$ – теоретические частоты
G – сумма площадей сечений (абсолютная полнота древостоя), м^2
g – площадь поперечного сечения на высоте груди (1,3 м), м^2
H, h – высота дерева, м
H_0 – нулевая гипотеза
HF – видовая высота, м
i – индекс варианты (1, 2, …, n)
K – степень криволинейности
k – рекомендуемое число классов
λ – величина интервала (класса)
$\lambda_{\text{К}}$ (лямбда) – критерий Колмогорова
M – запас древостоя, м^3
m – математическое ожидание
Me – медиана
МНК – метод наименьших квадратов
Mo – мода
$m_{\bar{x}}$, m_σ, m_V, m_A, m_E – ошибка оценки среднего значения среднеквадратического отклонения, коэффициента вариации, асимметрии, эксцесса
n, N – объем выборки (общее число стволов), шт.
η – корреляционное отношение
P – точность оценки среднего значения выборки, %
P_3, P_{10}, P_{25} и т. д. – перцентили

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Цель лабораторной работы: рассчитать основные статистические показатели, характеризующие выборочную совокупность, и их стандартные ошибки.

Обеспечивающие средства: рабочая тетрадь, ручка, калькулятор, линейка, карандаш, стирка, персональный компьютер с установленным пакетом MS Office.

Продолжительность работы: 4 ч.

Общие положения, основные термины и вопросы для проработки лекционного материала и подготовки к лабораторной работе

Для того чтобы можно было всесторонне проанализировать исследуемый признак, необходимо вычислить целый ряд статистических показателей, характеризующих объект исследования. При этом статистики делятся на две группы:

– показатели, которые характеризуют центральную тенденцию или уровень ряда (это различные средние величины – мода, медиана, средняя арифметическая, средняя геометрическая и др.);

– показатели, измеряющие степень вариации (размах вариации, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесса и др.).

Для расчета основных статистических показателей используются *метод моментов* или *непосредственный метод* расчета. В связи с развитием компьютерных технологий последний способ наиболее распространен.

При обработке первичных экспериментальных материалов наиболее важным является расчет средней арифметической величины – основная величина, которая характеризует изучаемую совокупность.

Среднее арифметическое значение. Общая формула для определения величины средней арифметической – это отношение суммы значений всех вариант (x_i) выборки к их числу (объему выборки n). Средняя арифметическая величина для сгруппированных значений называется *средневзвешенной*:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot f_i)}{n}, \tag{4.1}$$

где k – количество классов; x_i – значение i-того класса (середина интервала, если ряд интервальный); f_i – частота i-того класса.

Средняя арифметическая величина используется для оценки математического ожидания исследуемой случайной величины.

Среднее квадратическое значение. Данная величина имеет большое значение в лесном хозяйстве для определения одного из основных таксационных показателей – среднего диаметра древостоя, который является среднеквадратической величиной. Это вызвано тем, что, согласно определяющему свойству, при замене всех элементов выборки на среднее квадратическое остается постоянной сумма квадратов элементов выборки. В том случае, если исходные данные сгруппированы в статистический ряд, среднее квадратическое значение определяется по формуле

$$\bar{x}_2 = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 \cdot f_i)}{n}}. \tag{4.2}$$

Данная величина позволяет вычислить сумму площадей сечений древостоя (абсолютную полноту древостоя – G), являющуюся важнейшим таксационным показателем:

$$G = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{d}^2,$$

где G – сумма площадей сечения древостоя; g_i – площадь поперечного сечения i-того дерева; d_i – диаметр i-того дерева; $\pi = 3{,}14$; $\bar{d}$ – среднеквадратический диаметр древостоя.

Определив сумму площадей сечения деревьев в древостое, можно найти его запас по известной формуле лесной таксации: $M = G \cdot HF$, где M – запас древостоя, м^3/га; HF – видовая высота, м (находится по специализированной таблице в зависимости от породы и средней высоты древостоя); G – сумма площадей сечения, м^2/га.

Средние величины указывают на то значение признака, вокруг которого группируются анализируемые наблюдения, но вокруг одного и того же значения признака наблюдения могут располагаться совершенно по-разному. Для того чтобы отразить характер расположения наблюдений вокруг среднего, и служат показатели вариации.

Размах вариации. Это наиболее простой показатель, характеризующий распределение вариант вокруг среднего. Он вычисляется как разность между максимальным и минимальным значениями признака, которые в биометрии называют также *лимитами* (от латинского слова *limes* – предел и обозначают символом *lim*):

$$R = x_{\max} - x_{\min}\,. \tag{4.3}$$

Если наблюдения плотно группируются вокруг среднего, то лимиты располагаются близко друг к другу и размах вариации оказывается небольшим и наоборот.

Однако размах вариации является ненадежным показателем, так как он вычисляется на основании значений лимитов. Для преодоления отмеченного недостатка необходимо учитывать не только крайние значения признака (лимиты), но и все варианты в выборке, чтобы понять характер распределения всех остальных значений, располагающихся ближе к среднему.

Эмпирическая дисперсия (σ^2, S^2). Этот показатель получил свое название от латинского слова *dispersio* – рассеяние, он представляет собой средний квадрат отклонений вариант от среднего арифметического:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n}. \tag{4.4}$$

Выборочная дисперсия, рассчитанная по данной формуле, дает смещенную оценку генеральной дисперсии. Для того чтобы получить несмещенную оценку, в формулу необходимо добавить сомножитель $\frac{n}{n-1}$, называемый *поправкой Бесселя*:

$$\sigma_x^2 = S_x^2 \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{4.5}$$

Величина $n-1$ из формулы называется *числом степеней свободы*, которое показывает, сколько в данном случае имеется независимых наблюдений.

В некоторых случаях использование дисперсии оказывается не очень удобным, поскольку в формуле каждое отклонение варианты от среднего значения возводится в квадрат, в итоге дисперсия измеряется в единицах, равных квадрату единицы измерения. Так, например, если высчитывается дисперсия показателя, измеряемого в метрах, то сама дисперсия будет выражаться в квадратных метрах, что само по себе бессмысленно для сравнения. Поэтому часто используется другой, очень близкий к дисперсии показатель вариации.

Среднеквадратическое отклонение. Для избавления от квадратов отклонений прибегают к действию, противоположному возведению в степень, т. е. извлекают квадратный корень из дисперсии. В итоге стандартное отклонение является в ряде случаев более удобной характеристикой вариации признаков, поскольку измеряется в тех же единицах, что и исходные данные:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n}} \text{ – смещенная оценка;} \quad (4.6)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ – несмещенная оценка.} \quad (4.7)$$

В связи с этим данный показатель является более естественным и легче поддается анализу. На основе правила «трех сигм» с помощью среднеквадратического отклонения можно производить первоначальную отбраковку значений в выборке. Ведь в интервале ±3σ от среднеарифметического значения находится 99,7% всех вариант ряда, в интервале ±2σ – 95,4% и в интервале ±1σ – 68,2% (рис. 4.1).

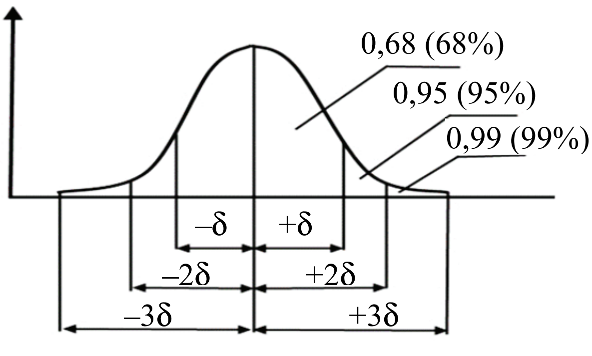

Рис. 4.1. Среднеквадратическое отклонение
как мера вариабельности признака

Коэффициент вариации. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение довольно полно характеризуют вариацию, однако часто удобнее иметь показатель, оценивающий разброс данных не в абсолютных величинах, а в *относительных*. Таким показателем является *коэффициент вариации*, показывающий, сколько процентов составляет среднеквадратическое отклонение от среднего арифметического:

$$V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\%. \tag{4.8}$$

В биометрии этот показатель часто оказывается весьма полезным. Дело в том, что анализу подвергаются, как правило, объекты живой природы, а они с течением времени изменяют свои размеры, растут. В связи с этим часто необходимо анализировать выборки, сделанные для объектов с разным средним возрастом, а следовательно, и с разными средними размерами. Если в таких случаях нужно сравнить степень изменчивости признака в разных выборках, то удобнее оперировать коэффициентом вариации, так как он дает нам величину вариации по отношению к среднему значению.

Варьирование считается слабым при коэффициенте вариации 0–10%, при 10–30% – средним, 30–60% – высоким, 60–100% – очень высоким, при более 100% – аномальным. В лесных биогеоценозах при коэффициенте вариации больше 30–33% распределение можно считать неоднородным (например, древостой будет разновозрастным или в анализ взяты данные второго яруса), т. е. чем меньше значение коэффициента вариации, тем совокупность однороднее. При $V > 50\%$ совокупность вообще неоднородна – сильное разнообразие ряда свидетельствует о малой представительности (типичности) соответствующей средней величины и, следовательно, о нецелесообразности ее использования в практических целях.

В одновозрастных чистых насаждениях, созданных путем посева и посадки и имевших до смыкания крон деревьев одинаковый уход, распределение деревьев по толщине характеризуется симметричной, одновершинной линией, называемой кривой нормального распределения. В этом случае влияние многочисленных факторов, задерживающих рост деревьев или способствующих ему, взаимно уравновешиваются. Однако довольно часто у кривых распределения появляется асимметрия.

Коэффициент асимметрии. Рассмотренные выше показатели довольно полно характеризуют анализируемые признаки, однако ни один из них не отражает степень симметричности распределения наблюдений относительно среднего значения. Ведь на практике довольно часто отклонения признака от среднего арифметического в меньшую и большую стороны носят неодинаковый характер. Для того чтобы оценить степень такой неравномерности распределения наблюдений относительно среднего арифметического, используют *коэффициент асимметрии* (мера косости вариационного ряда), который можно вычислить по формуле

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot \sigma_x^3}. \tag{4.9}$$

Коэффициент асимметрии может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В том случае, если левая ветвь распределения более пологая и длинная, а вершина кривой смещена вправо относительно среднего арифметического, коэффициент асимметрии для такого распределения имеет отрицательное значение (рис. 4.2). Такая асимметрия называется левосторонней или отрицательной.

Если распределение имеет более длинную и пологую правую ветвь, а его вершина смещена влево относительно среднего арифметического (рис. 4.2), в таком случае имеет место правосторонняя, или положительная, асимметрия. Коэффициент асимметрии в таком случае будет положительным.

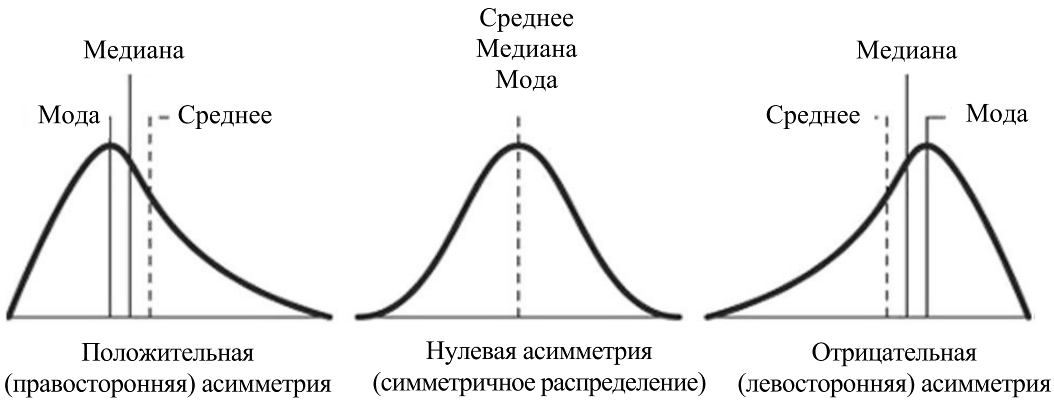

Рис. 4.2. Коэффициент асимметрии (отрицательный и положительный)

Если асимметрия равна 0, то ряд симметричен, и чем больше значение коэффициента отличается от нуля, тем сильнее выражена асимметрия. При $A < 0{,}5$ наблюдается незначительная асимметрия, 0,5–1,0 – умеренная, а при $A > 1{,}0$ – асимметрия сильная.

Асимметричность кривой распределения есть следствие конкуренции между деревьями. Более крупные деревья, занимающие в насаждении лучшее положение, имеют все преимущества для успешного роста. Поэтому с увеличением возраста правая ветвь кривой распределения, на которой сосредоточены крупные деревья, становится длиннее. Левая ветвь, изображающая отстающие в росте деревья, оказывается более короткой из-за отпада ослабленных деревьев или в результате их вырубки в порядке ухода за лесом. В итоге одновершинная, асимметричная кривая характеризует молодое насаждение или пройденное рубками ухода.

Левовершинное с положительной асимметрией распределение является типичным для распределений числа деревьев по диаметру в одновозрастных древостоях, не пройденных рубками ухода, или пройденных рубками ухода слабой (средней) интенсивности по комбинированному (низовому) способу, или выборочными рубками, при которых вырубаются в основном самые толстые деревья.

Правовершинное с отрицательной асимметрией распределение диаметров деревьев можно получить искусственным путем при интенсивной рубке маломерных деревьев. Это распределение является характерным для распределений высот деревьев в одновозрастном древостое.

По мере увеличения возраста древостоя растет размах ряда распределения деревьев по толщине. Из-за уменьшения числа деревьев кривая становится более плоской, о чем свидетельствует эксцесс.

Эмпирический коэффициент эксцесса. Кроме того, что распределения наблюдений могут отличаться друг от друга по степени асимметричности, они могут иметь разную крутизну. Распределения могут быть *островершинными* и *плосковершинными*. В случае островершинной кривой, когда большое число наблюдений группируется в непосредственной близости от центра распределения, говорят о наличии *положительного* эксцесса. Кривая распределения имеет *отрицательный* эксцесс, если она плосковершинная. Для оценки степени крутизны кривой распределения используется *коэффициент эксцесса* (мера крутости вариационного ряда), который вычисляется по формуле

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot \sigma_x^4} - 3. \qquad (4.10)$$

Этот коэффициент построен таким образом, что его значение для нормального распределения, как для наиболее изученного и часто используемого, равен нулю. В том случае, если коэффициент эксцесса принимает положительное значение (положительный эксцесс), распределение вариант будет более крутым, чем нормальное распределение. Если этот показатель меньше нуля (отрицательный эксцесс), наблюдения будут образовывать более плосковершинную кривую, чем нормальное распределение (рис. 4.3).

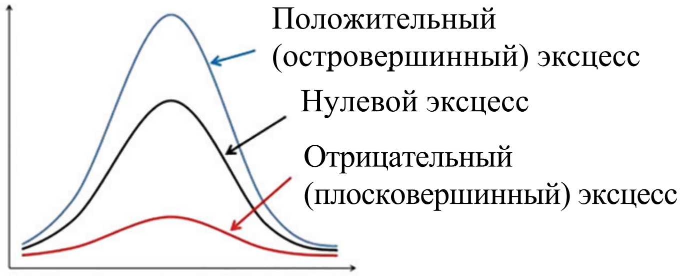

Рис. 4.3. Коэффициент эксцесса (отрицательный и положительный)

Для насаждений сложных, смешанных из нескольких поколений (разновозрастных) кривая эксцесса имеет *две или несколько вершин*. Отрицательное значение эксцесса может опускаться до –2.

Статистические показатели, характеризующие выборочную совокупность, как правило, не совпадают с их истинными значениями. Такие отклонения являются случайными величинами, и они изменяются от выборки к выборке. Величину отклонения выборочных статистик от истинных значений оцениваемых с их помощью параметров называют статистической ошибкой. Ниже приведены формулы для вычисления стандартных ошибок основных статистических показателей.

Ошибка среднеарифметической величины:

$$m_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (4.11)$$

Ошибка среднеквадратического отклонения:

$$m_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \cdot n}}. \qquad (4.12)$$

Ошибка коэффициента вариации:

$$m_{V} = \frac{V}{\sqrt{2 \cdot n}}. \qquad (4.13)$$

Ошибка коэффициента асимметрии:

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}}. \quad (4.14)$$

Ошибка коэффициента эксцесса:

$$m_E = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}}. \quad (4.15)$$

Не следует путать статистическую ошибку с методическими ошибками и ошибками точности (точности измерений, подсчетов и т. д.), хотя методические погрешности и увеличивают ошибку репрезентативности, но другим путем – методические ошибки увеличивают изменчивость признака, стандартное отклонение.

При всей неизбежности статистической ошибки она может быть сведена к минимуму отбором достаточного числа особей (вариант). С ростом объема выборки оценки параметров стабилизируются, а их ошибки репрезентативности уменьшаются.

Для сравнения ошибок оценки среднего для объектов, имеющих разную размерность, часто используют показатель точности, который представляет собой стандартную ошибку оценки среднего, выраженную в процентах от самой средней величины:

$$P = \frac{m_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (4.16)$$

Если точность оценки средней величины в практике ведения лесного хозяйства не превышает 2%, то выборочная совокупность была заложена достаточного размера по площади и представлена обоснованным числом наблюдений (стволов деревьев).

Задание 1. Рассчитать средние величины для вариационного ряда диаметров и высот.

Задание 2. Рассчитать основные показатели вариации для вариационного ряда диаметров и высот.

Задание 3. Рассчитать стандартные ошибки основных показателей вариации для вариационного ряда диаметров и высот.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Рассмотрим порядок вычисления средних величин на примере вариационных рядов по диаметрам и высотам (табл. 1.3 и 1.4). Для выполнения вычислений составим вспомогательную табл. 4.1.

Таблица 4.1

Вычисление средних значений (диаметры)

D_i	f_i	$D_i \cdot f_i$	$D_i^2 \cdot f_i$	g_i	$g_i \cdot f_i$
16,0	3	48,0	768,0	0,0201	0,0603
20,0	13	260,0	5 200,0	0,0314	0,4082
24,0	29	696,0	16 704,0	0,0452	1,3108
28,0	55	1 540,0	43 120,0	0,0616	3,3880
32,0	30	960,0	30 720,0	0,0804	2,4120
36,0	32	1 152,0	41 472,0	0,1018	3,2576
40,0	17	680,0	27 200,0	0,1257	2,1369
44,0	12	528,0	23 232,0	0,1521	1,8252
48,0	2	96,0	4 608,0	0,1810	0,3620
52,0	5	260,0	13 520,0	0,2124	1,0620
56,0	0	0,0	0,0	0,2463	0,0000
60,0	2	120,0	7 200,0	0,2827	0,5654
Сумма	200	6 340,0	213 744,0	–	16,7884

Теперь, пользуясь формулой (4.1), вычислим среднее арифметическое значение

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(D_i \cdot f_i)}{n} = \frac{6340,0}{200} = 31,70 \text{ см}$$

и по формуле (4.2) среднее квадратическое:

$$\overline{D}_2 = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{k}(D_i^2 \cdot f_i)}{200}} = \sqrt[2]{\frac{213\ 744,0}{200}} = 32,69 \text{ см}.$$

После на основе полученной средней квадратической вычислим сумму площадей сечений древостоя. Для этого определим площадь сечения, соответствующую среднеквадратическому диаметру:

$$\overline{g} = \frac{\pi \cdot \overline{D}_2^2}{4} = \frac{3,1416 \cdot 32,69^2}{4} = 839,31 \text{ см}^2 = 0,083\ 931 \text{ м}^2.$$

Умножив полученную величину на число стволов, получим сумму площадей сечений древостоя:

$$G = g \cdot n = 0,083\ 931 \cdot 200 = 16,79 \text{ м}^2.$$

Сравнивая полученную величину с площадью сечения, вычисленной по данным ряда диаметров (табл. 4.1), видим, что среднее квадратическое значение позволяет очень точно определять важнейший таксационный показатель – сумму площадей сечений древостоя.

Аналогичным образом определим средние значения для ряда высот. Для этого составим сначала вспомогательную табл. 4.2.

Таблица 4.2

Вычисление средних значений (высоты)

H_i	f_i	$H_i \cdot f_i$	$H_i^2 \cdot f_i$
18,5	1	18,5	342,3
19,5	2	39,0	760,5
20,5	4	82,0	1 681,0
21,5	13	279,5	6 009,3
22,5	21	472,5	10 631,3
23,5	22	517,0	12 149,5
24,5	43	1 053,5	25 810,8
25,5	40	1 020,0	26 010,0
26,5	18	477,0	12 640,5
27,5	21	577,5	15 881,3
28,5	13	370,5	10 559,3
29,5	1	29,5	870,3
30,5	1	30,5	930,3
Сумма	200	4 967,0	124 276,0

Далее, подставляя полученные суммы в формулы (4.1) и (4.2), вычисляем среднее арифметическое значение

$$\overline{H} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(H_i \cdot f_i)}{n} = \frac{4967{,}0}{200} = 24{,}84 \text{ м}$$

и среднее квадратическое:

$$\overline{H}_2 = \sqrt[2]{\frac{\sum_{i=1}^{k}(H_i^2 \cdot f_i)}{200}} = \sqrt[2]{\frac{124\ 276{,}0}{200}} = 24{,}93 \text{ м.}$$

Задание 2. Вычислим рассмотренные выше показатели вариации для диаметров и высот деревьев. Проще всего определить размах вариации. Для этого достаточно найти минимальное и максимальное значения:

$$R_D = D_{\max} - D_{\min} = 60,0 - 16,0 = 44,0 \text{ см} \text{ – для диаметров;}$$

$$R_H = H_{\max} - H_{\min} = 30,3 - 18,5 = 11,8 \text{ м} \text{ – для высот.}$$

Для того чтобы определить остальные показатели вариации, составим по данным вариационных рядов диаметров и высот вспомогательные табл. 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3

Вычисление показателей вариации (диаметры)

D_i	f_i	$D_i - \overline{D}$	$(D_i - \overline{D})^2 \cdot f_i$	$(D_i - \overline{D})^3 \cdot f_i$	$(D_i - \overline{D})^4 \cdot f_i$
16,0	3	–15,70	739,47	–11 609,68	182 271,98
20,0	13	–11,70	1779,57	–20 820,97	243 605,35
24,0	29	–7,70	1 719,41	–13 239,46	101 943,84
28,0	55	–3,70	752,95	–2 785,92	10 307,90
32,0	30	0,30	2,70	0,81	0,24
36,0	32	4,30	591,68	2 544,22	10 940,15
40,0	17	8,30	1 171,13	9 720,38	80 679,15
44,0	12	12,30	1 815,48	22 330,40	274 663,92
48,0	2	16,30	531,38	8 661,49	141 182,29
52,0	5	20,30	2 060,45	41 827,14	849 090,94
56,0	0	24,30	0	0	0
60,0	2	28,30	1 601,78	45 330,37	1 282 849,47
Сумма	200	–	12 766,00	81 958,78	3 177 535,23

Таблица 4.4

Вычисление показателей вариации (высоты)

H_i	f_i	$H_i - \overline{H}$	$(H_i - H)^2 \cdot f_i$	$(H_i - \overline{H})^3 \cdot f_i$	$(H_i - \overline{H})^4 \cdot f_i$
18,5	1	–6,34	40,2	–254,87	1 615,88
19,5	2	–5,34	57,03	–304,54	1 626,24
20,5	4	–4,34	75,34	–326,98	1 419,09
21,5	13	–3,34	145,02	–484,37	1 617,8
22,5	21	–2,34	114,99	–269,08	629,65
23,5	22	–1,34	39,5	–52,93	70,93
24,5	43	–0,34	4,97	–1,69	0,57
25,5	40	0,66	17,42	11,5	7,59
26,5	18	1,66	49,6	82,34	136,68
27,5	21	2,66	148,59	395,25	1 051,37
28,5	13	3,66	174,14	637,35	2 332,7
29,5	1	4,66	21,72	101,22	471,69
30,5	1	5,66	32,04	181,35	1 026,44
Сумма	200	–	920,56	–285,45	12 006,63

Подставляя значения из этих таблиц в формулы (4.4)–(4.10), получим оценки остальных показателей вариации для диаметров и высот:

– диаметры:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^2}{n} = \frac{12\ 766{,}0}{200} = 63{,}83;$$

$$\sigma_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^2}{n-1} = \frac{12\ 766{,}0}{199} = 64{,}15;$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^2}{n}} = \sqrt{\frac{12\ 766{,}0}{200}} = 7{,}989;$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12\ 766}{199}} = 8{,}009;$$

$$V_D = \frac{\sigma_D}{\overline{D}} \cdot 100\% = \frac{7{,}989}{31{,}70} \cdot 100\% = 25{,}33\%;$$

$$A_D = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^3}{n \cdot \sigma_D^3} = \frac{81\ 958{,}78}{200 \cdot 8{,}009^3} = 0{,}7977;$$

$$E_D = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (D_i - \overline{D})^4}{n \cdot \sigma_D^4} - 3 = \frac{3\ 177\ 535{,}23}{200 \cdot 8{,}009^4} = 3{,}8614 - 3 = 0{,}8614;$$

– высоты:

$$S_H^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^2}{n} = \frac{920{,}56}{200} = 4{,}60;$$

$$\sigma_H^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^2}{n-1} = \frac{920{,}56}{199} = 4{,}63;$$

$$S_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^2}{n}} = \sqrt{\frac{920{,}56}{200}} = 2{,}145;$$

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{920,56}{199}} = 2,151;$$

$$V_H = \frac{\sigma_H}{\overline{H}} \cdot 100\% = \frac{2,151}{24,84} \cdot 100\% = 8,68\%;$$

$$A_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^3}{n \cdot \sigma_H^3} = \frac{-285,45}{200 \cdot 2,151^3} = -0,1434;$$

$$E_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (H_i - \overline{H})^4}{n \cdot \sigma_H^4} - 3 = \frac{12\ 006,63}{200 \cdot 2,151^4} = 2,8043 - 3 = -0,1957.$$

Задание 3. Вычислим стандартные ошибки полученных оценок статистических показателей для определения их точности:

диаметры

$$m_{\overline{D}} = \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} = \frac{8,009}{\sqrt{200}} = 0,566;$$

$$m_\sigma = \frac{\sigma_D}{\sqrt{2 \cdot n}} = \frac{8,009}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 0,400;$$

$$m_V = \frac{V_D}{\sqrt{2 \cdot n}} = \frac{25,33}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 1,791;$$

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{\frac{6}{200}} = 0,173;$$

$$m_E = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{200}} = 0,346;$$

высоты

$$m_{\overline{H}} = \frac{\sigma_H}{\sqrt{n}} = \frac{2,151}{\sqrt{200}} = 0,152;$$

$$m_\sigma = \frac{\sigma_H}{\sqrt{2 \cdot n}} = \frac{2,151}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 0,108;$$

$$m_V = \frac{V_H}{\sqrt{2 \cdot n}} = \frac{8,68}{\sqrt{2 \cdot 200}} = 0,614;$$

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{\frac{6}{200}} = 0,173;$$

$$m_E = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{200}} = 0,346.$$

Вычислим показатель точности для рассматриваемого примера по формуле (4.16):

$$P_D = \frac{m_{\overline{D}}}{\overline{D}} \cdot 100\% = \frac{0,566}{31,70} \cdot 100\% = 1,79\% \text{ – диаметры;}$$

$$P_H = \frac{m_{\overline{H}}}{\overline{H}} \cdot 100\% = \frac{0,152}{24,84} \cdot 100\% = 0,61\% \text{ – высоты.}$$

СТУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РЯДА

Цель лабораторной работы: рассчитать структурные характеристики вариационных рядов.

Обеспечивающие средства: рабочая тетрадь, ручка, калькулятор, линейка, карандаш, стирка, персональный компьютер с установленным пакетом MS Office.

Продолжительность работы: 2 ч.

Общие положения, основные термины и вопросы для проработки лекционного материала и подготовки к лабораторной работе

Наряду со степенными средними и показателями вариации для характеристики экспериментальных данных используются так называемые структурные характеристики.

Мода. Значение признака, которое наиболее часто встречается в выборке, называется *модой*. Если данные сгруппированы, то класс с максимальным количеством вариант, называется *модальным*.

Распределение, имеющее один модальный класс, называется *унимодальным*. Если распределение имеет два или более максимума, то оно называется *бимодальным* или *мультимодальным* соответственно.

Если при анализе непрерывно варьирующего признака исходные данные сгруппированы в интервальный ряд, то мода может находиться в любом месте модального интервала. Ее местоположение можно оценить, смоделировав зависимость частоты от величины исследуемого признака в модальном и двух соседних с ним интервалах с помощью параболы второго порядка. Такой подход позволяет получить формулу для приближенной оценки моды:

$$Mo = x_{Mo} + \lambda \cdot \frac{f_{m-1} - f_{m+1}}{2 \cdot (f_{m+1} - 2 \cdot f_m + f_{m-1})}, \qquad (5.1)$$

где x_{Mo} – центр модального интервала; λ – величина интервала; f_{m-1} – частота интервала, предшествующего модальному; f_{m+1} – частота интервала, следующего за модальным; f_m – частота модального интервала.

Медиана. Положение экспериментальных данных достаточно хорошо характеризуется различными степенными средними. Однако в случае малой выборки на величину этих статистик могут оказывать довольно значительное влияние крайние варианты, которые являются наименее характерными элементами выборки. Этого недостатка лишена медиана, значение которой определяется наиболее типичными элементами выборки. *Медиана* – это значение признака, которое делит всю выборку на две равные части – половина вариант имеет значения меньшие, чем медиана, а половина – большие.

Проще всего значение медианы определяется в случае несгруппированного набора данных – для этого надо предварительно упорядочить все элементы выборки по возрастанию (*ранжировать*). Например, в выборке из 101 наблюдения медиана будет равна значению 51-го признака, в выборке из 100 наблюдений значение медианы будет находиться между значениями 50-го и 51-го признаков.

В случае, если медиану надо определить для сгруппированного набора данных, начинают с того, что находят, в каком классе она расположено. Проще всего это сделать при наличии накопленных частот вариационного ряда. Класс, в котором находится медиана (медианный интервал), – это первый интервал, у которого накопленная частота окажется больше $n/2$. Предполагая, что внутри медианного интервала наблюдения располагаются равномерно, медиану можно определить по формуле

$$Me = x_{Me} - \frac{\lambda}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_j} \right), \qquad (5.2)$$

где x_{Me} – центр медианного интервала; λ – величина интервала; n – объем выборки; j – номер медианного интервала; $\sum_{i=1}^{j-1} f_i$ – накопленная частота предшествующего медианному интервалу; f_j – частота медианного интервала.

Квантили. Медиана делит вариационный ряд на две равные части. В более общем случае мы можем разделить вариационный ряд на две неравные части в любом соотношении. Статистики, которые отделяют от вариационного ряда определенную часть его членов, называются *квантилями*.

Квантили, отделяющие от вариационного ряда 1, 2, ..., 99 процентов его членов, называются *перцентилями*. С помощью 99 перцентилей P_1, P_2, …, P_{99} вариационный ряд делится на 100 равных частей. Девять статистик, которые делят вариационный ряд на десять одинаковых частей, называются *децилями*. *Квартилями* называют три квантиля (Q_1, Q_2 и Q_3), делящие вариационный ряд на четыре равные части. Они соответствуют перцентилям, отделяющим от ранжированного ряда наблюдений 25, 50 и 75% вариант соответственно:

$$Q_1 = P_{25},\ Q_2 = P_{50},\ Q_3 = P_{75}.$$

Кроме того, квартиль и перцентиль, делящие вариационный ряд на две равные части, соответствуют медиане ряда наблюдений:

$$Q_2 = P_{50} = Me.$$

В практике чаще всего используют перцентили P_3, P_{10}, P_{25}, P_{50}, P_{75}, P_{90} и P_{97}. Определяют квантили аналогично тому, как и медиану. В том случае, если анализируется интервальный вариационный ряд, можно воспользоваться формулой

$$P_L = x_L - \frac{\lambda}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{\frac{L \cdot n}{100} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_L} \right), \tag{5.3}$$

где P_L – квантиль, отделяющий от ранжированного ряда L процентов наблюдений; x_L – центр интервала, в который попадает квантиль P_L; j – номер интервала, в который попадает квантиль P_L; L – процент наблюдений в выборке, которые меньше, чем квантиль P_L; $\sum_{i=1}^{j-1} f_i$ – накопленная частота интервала, предшествующего интервалу, в котором находится квантиль P_L. Для определения, в каком интервале находится квантиль, следует воспользоваться накопленными частотами ряда распределения. Первый интервал, у которого накопленная частота окажется больше, чем величина ($L \cdot n$ /100), и будет таким классом.

Задание. Рассчитать структурные характеристики для вариационного ряда диаметров и высот.

Порядок выполнения работы

Задание. Рассмотрим процесс вычисления структурных характеристик на примере вариационных рядов по диаметру и высоте. Пользуясь формулами (5.1)–(5.3), а также данными табл. 1.3 и 1.4, вычислим структурные характеристики для диаметров и высот:

– диаметры:

$$Mo_D = x_{Mo,D} + \lambda_D \cdot \frac{f_{m-1} - f_{m+1}}{2 \cdot (f_{m+1} - 2 \cdot f_m + f_{m-1})} =$$

$$= 28,0 + 4,0 \cdot \frac{29 - 30}{2 \cdot (30 - 2 \cdot 55 + 29)} = 28,0 + 4,0 \cdot 0,0098 = 28,0;$$

$$Me_D = x_{Me,D} - \frac{\lambda_D}{2} + \lambda_D \cdot \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_j} \right) = 32,0 - \frac{4,0}{2} + 4,0 \cdot \left(\frac{\frac{200}{2} - 100}{30} \right) =$$

$$= 32,0 - 2,0 + 4,0 \cdot 0 = 30,0;$$

$$Q_{1,D} = P_{25,D} = x_{25,D} - \frac{\lambda_D}{2} + \lambda_D \cdot \left(\frac{\frac{25 \cdot n}{100} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_{25}} \right) = 28,0 - \frac{4,0}{2} +$$

$$+ 4,0 \cdot \left(\frac{\frac{25 \cdot 200}{100} - 45}{55} \right) = 28,0 - 2,0 + 4,0 \cdot 0,0909 = 26,4;$$

$$Me_D = Q_{2,D} = P_{50,D} = x_{50,D} - \frac{\lambda_D}{2} + \lambda_D \cdot \left(\frac{\frac{50 \cdot n}{100} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_{50}} \right) = 32,0 - \frac{4,0}{2} +$$

$$+\ 4{,}0\cdot\left(\frac{\frac{50\cdot 200}{100}-100}{30}\right)=32{,}0-2{,}0+4{,}0\cdot 0=30{,}0;$$

$$Q_{3,D}=P_{75,D}=x_{75,D}-\frac{\lambda_D}{2}+\lambda_D\cdot\left(\frac{\frac{75\cdot n}{100}-\sum_{i=1}^{j-1}f_i}{f_{75}}\right)=36{,}0-\frac{4{,}0}{2}+$$

$$+\ 4{,}0\cdot\left(\frac{\frac{75\cdot 200}{100}-130}{32}\right)=36{,}0-2{,}0+4{,}0\cdot 0{,}6250=36{,}5;$$

– высоты:

$$Mo_H=x_{Mo,H}+\lambda_H\cdot\frac{f_{m-1}-f_{m+1}}{2\cdot(f_{m+1}-2\cdot f_m+f_{m-1})}=$$

$$=24{,}5+1{,}0\cdot\frac{22-40}{2\cdot(40-2\cdot 43+22)}=24{,}5+1{,}0\cdot 0{,}3750=24{,}9;$$

$$Me_H=x_{Me,H}-\frac{\lambda_H}{2}+\lambda_H\cdot\left(\frac{\frac{n}{2}-\sum_{i=1}^{j-1}f_i}{f_j}\right)=24{,}5-\frac{1{,}0}{2}+1{,}0\cdot\left(\frac{\frac{200}{2}-63}{43}\right)=$$

$$=24{,}5-0{,}5+1{,}0\cdot 0{,}8605=24{,}9;$$

$$Q_{1,D}=P_{25,D}=x_{25,D}-\frac{\lambda_D}{2}+\lambda_D\cdot\left(\frac{\frac{25\cdot n}{100}-\sum_{i=1}^{j-1}f_i}{f_{25}}\right)=23{,}5-\frac{1{,}0}{2}+$$

$$+\ 1{,}0\cdot\left(\frac{\frac{25\cdot 200}{100}-41}{22}\right)=23{,}5-0{,}5+1{,}0\cdot 0{,}4091=23{,}4;$$

$$Me_H = Q_{2,H} = P_{50,H} = x_{50,H} - \frac{\lambda_H}{2} + \lambda_H \cdot \left(\frac{\frac{50 \cdot n}{100} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_{50}} \right) = 24,5 - \frac{1,0}{2} +$$

$$+ 1,0 \cdot \left(\frac{\frac{50 \cdot 200}{100} - 63}{43} \right) = 24,5 - 0,5 + 1,0 \cdot 0,8605 = 24,9;$$

$$Q_{3,H} = P_{75,H} = x_{75,H} - \frac{\lambda_H}{2} + \lambda_H \cdot \left(\frac{\frac{75 \cdot n}{100} - \sum_{i=1}^{j-1} f_i}{f_{75}} \right) = 26,5 - \frac{1,0}{2} +$$

$$+ 1,0 \cdot \left(\frac{\frac{75 \cdot 200}{100} - 148}{18} \right) = 26,5 - 0,5 + 1,0 \cdot 0,2222 = 26,2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Нормальное распределение

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,500	0,504	0,506	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,728	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
3,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000
3,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,961	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971

Таблица 2

Критические значения χ^2 распределения

$\gamma \backslash \alpha$	**0,99**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**	**0,10**	**0,05**	**0,01**	**0,001**
1	0,00016	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	2,706	3,841	6,635	10,827
2	0,0201	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	4,605	5,991	9,210	13,8915
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	6,251	7,815	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	7,779	9,488	13,277	18,467
5	0,554	1,145	4,610	2,343	3,000	4,351	6,064	9,236	11,070	15,086	20,515
6	0,872	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	10,645	12,592	16,812	22,457
7	1,239	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,363	12,017	14,067	18,475	24,322
8	1,646	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	13,362	15,507	20,090	26,125
9	2,088	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	14,684	16,919	213,666	27,877
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	15,987	18,307	23,209	29,588
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	17,275	19,675	24,725	31,264
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	18,519	21,026	26,207	32,909
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	19,812	22,362	27,688	34,528
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	21,064	23,685	29,141	36,123
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	22,307	24,996	30,578	37,697
16	5,812	7,962	9,312	11,152	012,624	15,338	18,418	23,542	26,296	32,000	39,252
17	6,408	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	24,769	27,587	33,409	40,790
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	25,989	28,869	34,805	42,312
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	27,204	30,144	36,191	43,820
20	8,260	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	28,412	31,410	37,566	45,315
21	8,897	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,853	29,615	32,671	38,932	46,797
22	9,542	12,338	14,041	16,310	18,101	21,337	24,939	30,813	33,924	40,289	48,268
23	10,196	13,091	014,848	17,187	19,021	22,337	26,018	32,007	35,172	41,638	49,728
24	10,856	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	33,196	36,415	42,980	51,179
25	11,524	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	34,382	37,652	44,314	52,620
26	12,198	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	35,563	38,885	45,642	54,052
27	12,879	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	36,741	40,113	46,963	55,476
28	13,565	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	37,916	41,337	48,278	56,893
29	14,256	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	39,087	42,557	49,588	58,302
30	14,953	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	40,256	43,773	50,892	59,703

В таблице приведены значения квантилей $\chi^2_{\alpha,\gamma}$ в зависимости от числа степеней свободы γ и вероятности α такими, что $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\gamma} = \alpha)$.

Таблица 3

Квантили распределения Колмогорова λ_α

α	λ_α	α	λ_α	α	λ_α
0,99	0,44	0,50	0,83	0,15	1,14
0,90	0,57	0,40	0,89	0,10	1,22
0,80	0,64	0,30	0,97	0,05	1,36
0,70	0,71	0,25	1,02	0,02	1,53
0,60	0,77	0,20	1,07	0,01	1,63

В таблице приведены значения квантилей λ_α в зависимости от вероятности α такой, что $P(\lambda \geq \lambda_\alpha) = \alpha$.

Таблица 4

Значения критерия Стьюдента при различных уровнях значимости

γ	Уровень значимости			γ	Уровень значимости		
	0,05	**0,01**	**0,001**		**0,05**	**0,01**	**0,001**
2	4,30	9,93	31,60	**21**	2,08	2,83	3,82
3	3,18	5,84	12,94	**22**	2,07	2,82	3,79
4	2,78	4,60	8,61	**23**	2,07	2,81	3,77
5	2,57	4,03	6,86	**24**	2,06	2,80	3,75
6	2,45	3,71	5,96	**25**	2,06	2,79	3,73
7	2,37	3,50	5,41	**26**	2,06	2,78	3,71
8	2,31	3,36	5,04	**27**	2,05	2,77	3,69
9	2,26	3,25	4,78	**28**	2,05	2,76	3,67
10	2,23	3,17	4,49	**29**	2,04	2,76	3,66
11	2,20	3,11	4,44	**30**	2,04	2,75	3,65
12	2,18	3,06	4,32	**40**	2,02	2,70	3,55
13	2,16	3,01	4,22	**50**	2,01	2,68	3,50
14	2,15	2,98	4,14	**60**	2,00	2,66	3,46
15	2,13	2,95	4,07	**80**	1,99	2,64	3,42
16	2,12	2,92	4,02	**100**	1,98	2,63	3,39
17	2,11	2,90	3,97	**120**	1,98	2,63	3,37
18	2,10	2,88	3,92	**200**	1,97	2,60	3,34
19	2,09	2,86	3,88	**500**	1,96	2,59	3,31
20	2,09	2,85	3,85	∞	1,96	2,58	3,29

Таблица 5

F*-распределение Фишера** (в таблице приведены верхние 5% – точки ***F ($\gamma_в$, γ_x, 0,95))

γ_e	γ_x																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,61	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,47	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	184	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,82	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,4	2,29	2,2	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,74	1,69	1,63	1,58	1,51	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,29	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00